

【発展】テイラーの定理

高校数学の範囲を逸脱するが、近似式の概念の先にあるテイラーの定理を参考として紹介する。定理の証明は概略だけ記す。

① 1次近似から2次近似へ ② n 次近似 ③ テイラーの定理 ④ テイラーの定理の応用

① 1次近似から2次近似へ

関数 $f(x)$ に対して、1次式 $g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ によって $x=a$ の近くでの近似を考えた。この1次式 $g(x)$ は $x=a$ の近くで $f(x)$ と“似た性質”をもつように定められている。すなわち、関数値 $f(a)$ と $g(a)$ が等しく微分係数 $f'(a)$ と $g'(a)$ も等しい。

そこで、 $g(x)$ に2次の項を加え、2次式によって近似し精度を高めることを考えよう。その2次式を $g(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + A(x-a)^2 \cdots \textcircled{*}$ において係数 A を定めよう。なお2次の項として Ax^2 でなく $A(x-a)^2$ を加えたのは、 $f(a) = g(a)$ 、 $f'(a) = g'(a)$ という“似た性質”を保つためである。係数 A の定め方であるが、 $f(a) = g(a)$ 、 $f'(a) = g'(a)$ に続けて $f''(a) = g''(a)$ となつてほしいと考えるのが自然である。 $\textcircled{*}$ の両辺を2回微分して、 $g''(x) = 2A$ よって、 $f''(a) = g''(a)$ とするには $A = \frac{f''(a)}{2}$ と定めればよい。以上により、2次式 $g(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$ を $f(x)$ の $x=a$ の近くでの2次近似式とよぶ。

② n 次近似

①と同様に考えることで、 n 次近似式を定めよう。関数 $f(x)$ に対して、 n 次式 $g(x) = \sum_{k=0}^n A_k(x-a)^k$ とおき、 $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$ ($k=0, 1, \dots, n$) が成り立つように係数 A_k を定めよう。 $g^{(k)}(a) = k!A_k$ より、 $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$ となるには $A_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ と定めればよい。以上により、 n 次式 $g(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ を $f(x)$ の $x=a$ の近くでの n 次近似式とよぶ。

ここで、今までの流れを整理し、定義・定理の形でまとめておこう。

定義 < n 次近似式 >

関数 $f(x)$ に対して、 $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$ ($k=0, 1, \dots, n$) を満たす n 次式 $g(x)$ を、 $f(x)$ の $x=a$ の近くでの n 次近似式 という。

定理 < n 次近似式 >

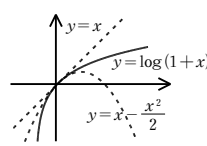
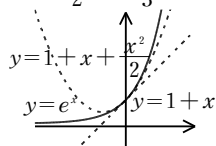
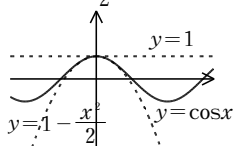
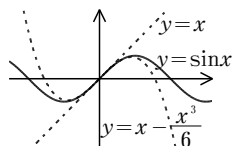
関数 $f(x)$ の $x=a$ の近くでの n 次近似式は

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

特に、1次近似式は $f(a) + f'(x)(x-a)$ 、2次近似式は $f(a) + f'(x)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$ である。

(例)

- $f(x) = \sin x$ に対して、 $f(0) = 0$ 、 $f'(0) = 1$ 、 $f''(0) = 0$ 、 $f'''(0) = -1$ だから、 $x=0$ の近くでの1次近似式は x 、2次近似式は x 、3次近似式は $x - \frac{x^3}{6}$ である。
- $f(x) = \cos x$ に対して、 $f(0) = 1$ 、 $f'(0) = 0$ 、 $f''(0) = -1$ 、 $f^{(3)}(0) = 0$ 、 $f^{(4)}(0) = 1$ だから、 $x=0$ の近くでの1次近似式は 1 、2次近似式は $1 - \frac{x^2}{2}$ 、4次近似式は $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ である。
- $f(x) = e^x$ に対して、 $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$ だから、 $x=0$ の近くでの1次近似式は $1+x$ 、2次近似式は $1+x + \frac{x^2}{2}$ 、3次近似式は $1+x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ である。
- $f(x) = \log(1+x)$ に対して、 $f(0) = 0$ 、 $f'(0) = 1$ 、 $f''(0) = -1$ 、 $f'''(0) = 2$ だから、 $x=0$ の近くでの1次近似式は x 、2次近似式は $x - \frac{1}{2}x^2$ 、3次近似式は $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$ である。



3 テイラーの定理

2 で n 次近似式を考えたが、気になるのはその誤差である。誤差 E とは真の関数値と近似式の値との差 $E = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ のことである。この誤差について答えるのがテイラーの定理である。

定理 <テイラーの定理 (Taylor's theorem) >

関数 $f(x)$ は開区間 I で $(n+1)$ 回微分可能で、 $a \in I$ とする。このとき、任意の $x \in I$ に対して、

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad \cdots \textcircled{*}$$

を満たす c が a と x の間に少なくとも 1 つ存在する。

(注意)

- $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ は $f(x)$ の $x=a$ の近くでの n 次近似式である。テイラーの定理は、誤差 E を $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$ と表せるような c が a と x の間に少なくとも 1 つ存在することを主張している。
- $n=0$ のとき、 $\textcircled{*}$ は $f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$ となる。これは (ラグランジュの) 平均値の定理である。すなわち、テイラーの定理は (ラグランジュの) 平均値の定理の一般化になっている。実際、証明にもコーシーの平均値の定理を用いる。

(証明の概略)

$F(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$, $G(x) = (x-a)^{n+1}$ とおくと、 $F^{(k)}(a) = G^{(k)}(a) = 0$ ($k=0, 1, \dots, n$) であり、

$F^{(n+1)}(a) = f^{(n+1)}(a)$, $G^{(n+1)}(a) = (n+1)!$ である。ここで、コーシーの平均値の定理より、

$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)}$ を満たす c_1 が a と x の間に少なくとも 1 つ存在する。同様にくり返して、

$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)} = \frac{F''(c_2)}{G''(c_2)} = \dots = \frac{F^{(n)}(c_n)}{G^{(n)}(c_n)} = \frac{F^{(n+1)}(c)}{G^{(n+1)}(c)}$ を満たす $c_2, \dots, c_n$, c が a と x の間に少なくとも 1 つ

ずつ存在する。上式は $F(x) = \frac{F^{(n+1)}(c)}{G^{(n+1)}(c)} G(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$ と同値だから、定理が示された。

4 テイラーの定理の応用

(1) n 次近似式の誤差

テイラーの定理より、誤差 $E = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ は $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$ と表される。このことから、 $x \rightarrow a$ のとき誤差 E は $(x-a)^n$ よりも速く 0 に収束することが分かる (正確にかくと、 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{E}{(x-a)^n} = 0$)。

(2) テイラー展開

関数 $f(x)$ が無限回微分可能で、 $\lim_{n \rightarrow \infty} E = 0$ ならば、 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ という無限級数になる。これを $f(x)$ の $x=a$ における **テイラー展開** (Taylor expansion) という。また、 $x=0$ におけるテイラー展開のことを **マクローリン展開** (Maclaurin expansion) という。 $\lim_{n \rightarrow \infty} E = 0$ となることについての議論が必要であるが、深入りはやめていくつか例をあげておこう。

- $f(x) = \sin x$ に対して、 $f^{(4k)}(0) = f^{(4k+2)}(0) = 0$, $f^{(4k+1)}(0) = 1$, $f^{(4k+3)}(0) = -1$ ($k=0, 1, \dots$) だから、マクローリン展開は $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \cdots \textcircled{1}$
- $f(x) = \cos x$ に対して、 $f^{(4k)}(0) = 1$, $f^{(4k+1)}(0) = f^{(4k+3)}(0) = 0$, $f^{(4k+2)}(0) = -1$ ($k=0, 1, \dots$) だから、マクローリン展開は $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \cdots \textcircled{2}$
- $f(x) = e^x$ に対して、 $f^{(k)}(0) = 1$ ($k=0, 1, \dots$) だから、マクローリン展開は $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \cdots \textcircled{3}$

厳密性が欠けていることは承知の上で、さらに議論をすすめてみよう。

- $\textcircled{3}$ 式において $x=1$ とすると、 $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ となる。
- $\textcircled{1} \sim \textcircled{3}$ 式を実数変数から複素数変数に拡張し、複素関数を考える。 $\textcircled{3}$ 式において $x = i\theta$ とすると、**オイラーの公式** (Euler's formula) $e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \theta^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} = \cos \theta + i \sin \theta$ が導かれる。さらに $\theta = \pi$ とすると、**オイラーの等式** (Euler's identity) $e^{i\pi} = -1$ が導かれる。