

1 秋休み最終日

秋休み最終日。今日はオフ。

さて、後期には計5回、高3の数学演習の授業を担当することになった。この取り組み自体初めて、担当していない学年の授業をもつのも良い経験。楽しみ。

図形と方程式を担当ということで、特に逆像法に特化することに。高2の夏期講習でも扱ったが、受験生に向けて講義することに。

ざっと問題案は以前作っていたので、板書案を作成していった。

問題案の中に、一昨日の高3添削でも出てきた2018年京大理系数学1がある。

改めて答案を書いてみたが、時間制限のある中では文字が多く混乱してしまいかねない。立場の把握が大切だ。

2 2018 京大理系数学 1

(1) 接点の x 座標を t として、

$$a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0 \quad \dots \textcircled{1} \quad 1 + c^2 \leq 2a \quad \dots \textcircled{2}$$

$$at^2 = b(t-1)^2 + c \quad \dots \textcircled{3} \quad at = b(t-1) \quad \dots \textcircled{4}$$

(b 消去したいが、 $\textcircled{4}$ で $t \neq 1$ か不明なので割れない、そこで $b(t-1)$ が消去できることを見る)

$$\textcircled{4} \text{ を } \textcircled{3} \text{ に用いて、} at^2 = at(t-1) + c \quad at = c$$

$$a \neq 0 \text{ だから、} t = \frac{c}{a} \quad \text{接点は} \left(\frac{c}{a}, \frac{c^2}{a} \right)$$

(2) ($\textcircled{4}$ を $\textcircled{3}$ に代入したので、代入元の $\textcircled{4}$ は残さないといけない)

$$t = \frac{c}{a} \text{ を } \textcircled{4} \text{ に用いて、} c = b \left(\frac{c}{a} - 1 \right) \quad a \neq 0 \text{ だから、} ac = b(c-a) \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\frac{c}{a} = X \quad \dots \textcircled{6} \quad \frac{c^2}{a} = Y \quad \dots \textcircled{7} \quad \underline{\textcircled{1} \cdot \textcircled{2} \cdot \textcircled{5} \cdot \textcircled{6} \cdot \textcircled{7} \text{ を満たす } a, b, c \text{ が存在する。}}$$

(X, Y は2や3と同じ定数、と見る)

($\textcircled{1} \textcircled{2}$ は不等式だから後、 $\textcircled{5} \textcircled{6} \textcircled{7}$ から a, b, c を求める。 $\textcircled{6} \textcircled{7}$ から a, c で、 $\textcircled{5}$ から b)

$\textcircled{6}$ と $a \neq 0$ より $c = Xa$ $\textcircled{7}$ に用いて、 $X^2a = Y$ $\textcircled{6}$ と $c \neq 0$ より $X \neq 0$ だから、

$$a = \frac{Y}{X^2} \quad \text{よって、} c = \frac{Y}{X} \quad (\textcircled{6} \textcircled{7} \text{ から } a, c \text{ の値が求まった})$$

(あとは $\textcircled{5}$ から b の値を求める、 $a = c$ なら両辺割れないから場合分け)

$X = 1$ と仮定すると、 $a = c = Y$ $\textcircled{5}$ に用いて、 $Y = 0$ $c = 0$ となり不適

$$\text{よって、} X \neq 1 \text{ より } a \neq c \quad \textcircled{5} \text{ より、} b = \frac{ac}{c-a} = \frac{Y^2}{X^3} \cdot \frac{X^2}{Y(X-1)} = \frac{Y}{X(X-1)}$$

(これでパラメータ a, b, c の値が求まった)

$$\text{これらを } \textcircled{1} \cdot \textcircled{2} \text{ に用いて、} X \neq 0, 1, Y \neq 0, 1 + \frac{Y^2}{X^2} \leq \frac{2Y}{X^2}$$

$$X^2 > 0 \text{ だから、} X \neq 0, 1, Y \neq 0, X^2 + (Y-1)^2 \leq 1$$

(円の周および内部のうち y 軸上と $(1, 1)$ のみ除く)