

1 体育祭準備が進む

体育祭の準備が続く。応援団はダンスや演舞の練習、後輩指導が進む。アトラクションはそろそろ脚本も定まってきて、音声録音や衣装準備など。パネル絵も下書きから着色に進んでいる。本番が楽しみだ。みんな頑張ってもらいたい。あとは天気が心配である。台風が来なければよいのだが。

2 パラメータ微分

さて授業。数Ⅲ微分の最終回となった。テーマは「近似式」である。教科書では $h \rightarrow 0$ のときの $f(a+h)$ の近似式と、 $x \rightarrow 0$ のときの $f(x)$ の近似式が分けて掲載されているが、いずれも本質は同じだ。わざわざ見た目が異なるだけの2種類を分けて書くのは、かえって混乱を招きやすい表記なのではないか。

授業では、 $x \rightarrow a$ のとき「虫眼鏡で拡大し、右に $x-a$ 進むと、上にこれの $f'(a)$ 倍進む」と考えさせる（究極的に拡大して見えてくる直線の傾きが $f'(a)$ という“微分のコア”の考え方通りである）。これにより、 $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$ という1次近似式を作る。これを単に書き換えて $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$ とするだけのことだ。特に $x \rightarrow 0$ のときの近似式を分けて書く必要もないと思われる。

例として、 e^x の $x \rightarrow 3$ での1次近似式を用いて e^π の近似値を計算させた。 $e \approx 2.7$ 、 $\pi \approx 3.1$ とすれば、なんとか手計算で約23という値が得られる。なお関連問題としては、99年東京大の「 $e^\pi > 21$ を示せ」がある（定積分の計算を進めた上で、最終的にこの不等式の証明となる問題だ）。関数の凸性より「接線の方が下」という評価で議論できる。

というか、1次近似式とわざわざ章立てされているが、やっていることは接線の式を求めていることと同じである。これぞまさに局所1次近似という微分のコアの通りの話だ。また、 e^x の $x \rightarrow 0$ での近似や $\log x$ の $x \rightarrow 1$ での近似は、虫眼鏡で拡大すると傾きが1に見えてきて、 e に関する極限の式

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \quad \text{とも関連がある。}$$

なお、1次近似から2次近似へ、さらに n 次近似からテイラーの定理へという発展内容についてもPDFにまとめておいた。記事末尾に添付しておく。