

1 後期最初の土曜講座

後期最初の土曜講座。クラブ試合等での公欠も一定数いて、教員側も引率のために課題自習の講座もある。仕方がない。いるメンバーで頑張ってもらいたいところだ。残りの LHR と午後はひたすら体育祭準備。台風が心配である。大丈夫かなあ。

2 平面ベクトル

さて、土曜講座。文系の演習授業の進度に合わせて、ベクトルの復習演習から行うことにした。平面ベクトルとは、平面図形を平行四辺形の斜めのマス目に乗せて計算する道具である。一次独立である基底 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ に対して、任意のベクトル $\overrightarrow{OP}$ は $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ と一意的に表せる。これは斜交座標 (s, t) を考えていることに他ならない。特に、正規直交基底をとると直交座標と同様となる。計量（長さ・角度）が必要な場合は、基底の大きさと内積を用意する。

共線条件が極めて大切である。点 P が直線 AB 上にあることの立式は以下の通りだ。

[1] (始点が直線上) $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ これは“伸ばす”という感覚 → 始点を O に変えると[2]に

[2] (始点が直線外) $\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ これは(係数の和 1 を) “分ける”という感覚

[3] ([2] の言い換え) $\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$, $\alpha + \beta = 1$ “和が1”

実際の平面図形の問題においては、基底 2 つ (始点固定) をとり、計量要素があれば基底の計量要素を求めておき、他のベクトル (始点固定) を基底の 1 次結合で表していく。

扱った問題を具体的にみておく。まずは成分表示 (未知数入り) された 2 ベクトルの平行条件。

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow ad - bc = 0$ これは“くるんが 0”と捉えさせる。2 ベクトルで張る三角形の面積公式

$S = \frac{1}{2}|ad - bc|$ の絶対値の内部が 0 ということだ。

次に、成分表示された 2 ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して、 $|\vec{a} + t\vec{b}|$ の最小値。図形的に見れば垂線を考えることになるが、もちろん代数的に扱う。

$\vec{a} + t\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} a_1 + tb_1 \\ a_2 + tb_2 \end{pmatrix}$ と成分表示してしまわず、

$\vec{a} + t\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ のままおいておく。特に空間ベクトルでは“パラメータをばらけさせない”のが

計算のポイントである。市販の解答ではばらけているものが多くあって良くないと思う。

あとは $|\vec{a} + t\vec{b}|^2$ 等の内積計算では、展開と数値代入を一気に書き下す練習をさせる。これも空間ベクトルになった際に途中式を長々書かないことへと繋がっていく。

ベクトルはそもそもの苦手意識や嫌悪感からか、出来が想定以上に良くない分野になりがちだ。原則の方針を間違えなければ代数的に処理できる便利な道具であると感じられるまで、しっかり習得させたい。