

1 通過領域

曲線 $f_t(x, y) = 0$ の通過領域。

具体的な点で実験。通過領域上かどうかの $\bigcirc \times$ 問題は、点の座標を代入して得られる t についての方程式に実数解があるかどうかで解決する。

これを一般化。 (X, Y) は通過領域上の点とする。 $f_t(X, Y) = 0$ (これは曲線群の式ではなく、 t についての方程式である、 X, Y は文字定数) を満たす実数 t が存在する。

t の 2 次方程式の場合は、判別式が 0 以上であることで解決。

さらに、 t を閉区間のみ動くという制限をかけると、「2 次方程式が閉区間に少なくとも 1 つの実数解をもつ」という解の配置問題に帰着される。数 I の数と式・2 次関数は高校数学のコア。

解の配置問題の基本例題として、閉区間で異なる 2 つの実数解をもつ条件が出てきて、頂点の y 座標、軸、端での符号の 3 つを扱うのだが、これは軸の位置で場合分け、すなわち「定義域内での増減で場合分け」が本質である。連続関数の閉区間内での最大最小の候補は、極大極小か端点である。軸が開区間内の場合は極値をもち、そうでない場合は極値をもたない。軸が開区間内か外かで場合分けするのが本質。

「2 次方程式が閉区間に少なくとも 1 つの実数解をもつ」に関しても、軸が開区間内か外かで場合分け。軸が開区間内なら、最小値は確定、最大値は端点のいずれかなので、少なくとも一方が 0 以上、と捉えられる。軸が開区間外なら、関数は単調で、最大最小は端点でとり、それらの積が 0 以下、と捉えられる。

このように、数 II 微分を学習して増減の概念を得た上で、2 次方程式の解の配置問題は再整理すべきである。

2 交点の軌跡

2 直線 $l_t: f_t(x, y) = 0$, $m_t: g_t(x, y) = 0$ の交点の軌跡。 t の値によらず 2 直線が直交するという設定が多い。直線が必ず通る定点を直径の両端とする円 (ただし除外点あり) が軌跡となる。

まず 2 直線の式を連立させて交点の座標を t で表す必要はないことの確認。

具体的な点で実験。軌跡上かどうかの $\bigcirc \times$ 問題を想定する。

これを一般化。 (X, Y) は軌跡上の点とする。 $f_t(X, Y) = 0$, $g_t(X, Y) = 0$ (これは 2 直線の式ではなく、 t についての連立方程式である、 X, Y は文字定数) を満たす実数 t が存在する。

一方の式から t の値を求める (X, Y は定数)。この際、分母にもってきたい値が 0 かどうかで場合分け。0 のとき (レアケース) で分かったことは何か、きちんとした理解が試されるところ。

0 でないときは t の値を求めて他方の式に代入。