

逆像法 1 – 夏期講習 1 日目

1 図形と方程式における直線や円の基本事項の確認

直線の方程式の一般形 $ax+by+c=0$ において, (a, b) は法線ベクトルの 1 つであること。

2 直線の直行条件 $aa'+bb'=0$ は, 2 直線の法線ベクトルが直交している (内積 0) と捉える。

2 直線の平行条件 $ab'-a'b=0$ は, 三角形の面積公式 $S=\frac{1}{2}|ab'-a'b|$ の絶対値内が 0 と捉える。

$ab'-a'b$ は “くるん” と名付ける。

点と直線の距離公式の分母は法線ベクトルの大きさ, 分子は点の座標を代入して絶対値。

円, 円の接線の方程式, 束の考え方

2 軌跡の基本の確認

2 定点からの距離の比が 2:1 である点の軌跡。教科書例題。

アポロニウスの円の話に触れておく。

まず実験から。具体的な点が軌跡上かどうかの判定。○×問題と捉えさせる。

これを一般化。 (X, Y) が軌跡上であるとする。この (X, Y) は具体的な点の文字定数による一般化。

x, y は座標を表す文字, xy 座標平面上の任意の定点 (X, Y) と文字は使い分けるべき。

(X, Y) は軌跡上かどうか, と ○× 問題にされても答えられない。軌跡を求めたいので, ○× 問題の ○ のみ考える, すなわち, (X, Y) が軌跡上である, とする。

立式して変形。これで分かることは, (X, Y) が軌跡上 $\Rightarrow$ 円周上, のみ。

$\Leftarrow$ が不明, すなわち, 円全体が求める軌跡か不明。そこで, 行っている式変形が同値であることを強調した答案を書く。両辺を 2 乗する際に「両辺は 0 以上だから」と断って同値変形であることを強調。これにより逆の吟味を省略。

3 動点の軌跡

パラメータ t が全実数を動くときの $P(f(t), g(t))$ の軌跡。 ($f(t)$ は 1 次式, $g(t)$ は 2 次式)

まず実験から。具体的な点が軌跡上かどうかの判定。○× 問題と捉えさせる。2 式を満たす実数 t が存在するかどうかにより ○× 問題が解決する。

第 1 式から t の値が求まる。この値が第 2 式も成り立たせるかによって ○× が決定される。

これを一般化。 (X, Y) が軌跡上であるとする。2 式を立式する。文字は t, X, Y と 3 文字あるが, t についての連立方程式であり, X, Y は文字定数「 X, Y は 2 とか 3 と同じ」。

第 1 式から t の値が求まる (X は定数)。この値が第 2 式も成り立たせるので, 代入。

x, y の関係式を知りたいから関係のない文字 t を消去する, という浅い理解から脱却させる。

同じ設定だが, $Q(f(t^2), g(t^2))$ の軌跡を考える。 t でなく t^2 の値が求まる。この際, 実数 t が存在するので 0 以上という条件がつく。単に文字消去すればよいという浅い理解だとこれが対応できない。

一般に, 写像 (mapping) における像 (image) を求める際に, 逆像 (inverse image) の存在を考える方法のことを, 逆像法とよぶ。

以後の講習ではひたすら逆像法を扱う。ひたすら同じ口調での解説を繰り返し, 生徒が問題を解く際に脳内再生されるくらいに印象に残すよう解説していきたい。