

1 線形計画法

まず先立って条件付き 2 変数関数の最大最小の基本例題として、「 $x + y = 1$ のとき $x^2 + y^2$ の最小値？」を確認。1 文字消去して x の 2 次関数とする。これは順像法。一方、逆像法でもやってみる。具体的な数値での実験を経て、 $x^2 + y^2 = k$ ($k \geq 0$) をとり得るとすると、 $x + y = 1$ かつ $x^2 + y^2 = k$ を満たす (x, y) が存在する。(ここでも 1 文字消去できるが、我慢して) 代数世界から幾何世界にうつると、直線と円が共有点をもつ、と言い換えられる。中心と直線の距離を立式して解決する。

これをふまえて線形計画法。 x, y が不等式 $f(x, y) \leq 0$ を満たすとき、2 変数関数 $g(x, y)$ の値域を求める。よく教科書や問題集でも「 $g(x, y) = k$ とおく」から始まる解説がなされるが、「 $= k$ とおく」が解法暗記的というか、そもそもなぜ $= k$ とおくのかを、逆像法であるという統一始点で解説し生徒の理解を得ておきたい、と考えている。 $g(x, y) = k$ をとり得るとする。 $f(x, y) \leq 0$ かつ $g(x, y) = k$ を満たす (x, y) が存在する。幾何世界にうつって、領域と直線(問題によっては円)が共有点をもつ。線形計画法も逆像法であるという視点で整理しておきたい。 $= k$ とおくときの k は、1 日目に扱った動点の軌跡における (X, Y) とおいた X, Y と同じ文字定数であるという理解に達しておきたい。

2 関数 $y = f(x)$ の値域

$y = \frac{(1 \text{ 次式})}{(2 \text{ 次式})}$ という分数関数の値域を考える。理系生で商の微分と $\lim$ を用いて順像法でも解決するが、本講座の趣旨とははずれる。

具体的な値で実験すると、分母を払って得られる x についての 2 次方程式に実数解があるかどうかで $\bigcirc \times$ 判定ができる。

これを一般化。 $y = Y$ をとり得るとする。 $Y = f(x)$ (これはもはや関数の式ではなく、 x についての方程式である、 Y は文字定数) とし、分母を払って整理。ただし分母を払う操作は同値性を崩しかね

ない。 $A = \frac{C}{B} \Leftrightarrow AB = C$ は $B \neq 0$ のときであるので、(分母) $\neq 0$ を断ってから分母を払う。

得られた方程式は 2 次方程式かどうか確定していない。「先頭の文字定数に注意」

$Y = 0$ のとき (レアケース) は x についての 1 次方程式となって解ける。これで分かったことは、0 は値域内である、ということ。ここもしっかり生徒の理解を得たいところ。

$Y \neq 0$ のときは判別式が 0 以上で解決。ただしここで得られた Y の範囲から、この場合分けて分かる値域にする際には、0 を除外しておくことに注意。場合分けを閉じて、値域を答える際に、0 を含めることになる。